Zum Beweis des Minimalsatzes der Lagerreibung

Rost, Ulrich

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 21, 1969, S.345-355

Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Zum Beweis des Minimalsatzes der Lagerreibung

Von **Ulrich Rost**

Vorgelegt von **G. Vogelpohl**

(Eingegangen am 18. 7. 1968)

Bei bewegten Maschinenteilen erfolgt die Kraftübertragung durch Druckentwicklung in der Gleitschicht zwischen den festen Flächen. Die Größe und Verteilung dieser Drücke wird durch die von *O. Reynolds* (1886) abgeleitete und nach ihm benannte Gleichung beschrieben:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{\bar{\eta}}\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{h^3}{\bar{\eta}}\frac{\partial p}{\partial z}\right)=6\,(U_1-U_2)\,\frac{\partial h}{\partial x}+6\,h\,\frac{\partial\,(U_1+U_2)}{\partial x}+(V_2-V_1). \tag{1}$$

Sie wurde bereits für viele Fälle der technischen Anwendung gelöst. Die Bücher von *A. Tipei* (1957) [1], *O. Pinkus* und *B. Sternlicht* (1961) [2] und *A. Cameron* (1966) [3] geben hierüber einen guten Überblick.

Die Reynoldssche Gleichung ist vom elliptischen Typ und selbstadjungiert und kann damit auf ein Variationsproblem zurückgeführt werden. Diesen Gedanken hat *G. Vogelpohl* bereits 1935 verfolgt und den Minimalsatz der Lagerreibung ausgesprochen: Bei reiner Flüssigkeitsreibung und gegebener Form des Tragspaltes stellt sich die Druckverteilung so ein, daß die in Reibungswärme umgesetzte Energie ein Minimum wird. Ein Beweis für diese Aussage wurde von *G. Vogelpohl* 1937 zu erbringen versucht, dadurch daß er die dissipierte Energie mit der Nebenbedingung des Verschwindens der Verdrängungsarbeit nach den Lehren der Variationsrechnung zu einem Extremum machte. Gegen diese Beweisführung müssen jedoch Bedenken erhoben werden, wie die folgenden Ausführungen zeigen. Dennoch bleibt der Satz als solcher bestehen. Als Nebenbedingung muß aber an Stelle des Verschwindens der Verdrängungsarbeit das Bestehen des Energiesatzes verwandt werden. Dieser besagt für den Fall des Lagerspaltes, daß die von außen dem Gleitraum zugeführte Energie gleich der in ihm dissipierten Energie sein muß, wenn man die Trägheitskräfte und damit die Änderungen der kinetischen Energie vernachlässigen kann, wie das beim Vorliegen kleiner Reynoldszahlen der Fall ist.

Bereits *Helmholtz* gelangte zu der Erkenntnis, daß sich in einer Strömung einer inkompressiblen Newtonschen Flüssigkeit eine derartige Geschwindigkeitsverteilung einstellt, daß die dissipierte Energie ein Minimum wird. Voraussetzung dabei ist es allerdings, daß die Trägheitskräfte gegenüber den übrigen Kräften vernachlässigt werden können und daß die Volumenkräfte sich aus einem eindeutigen Potential herleiten. Nähere Angaben über die diesbezüglichen Untersuchungen von *Helmholtz, Korteweg* und *Lord Rayleigh* kann man dem Lehrbuch der Hydrodynamik von *Lamb* [4] entnehmen. Die Tatsache, daß die dissipierte Energie ein Minimum ist, reicht jedoch nicht aus, um aus ihr die Geschwindigkeits- und Druckverteilungen in einer Strömung bestimmen zu können. *Vogelpohl* erkannte nun, daß das im Falle der Spaltströmung möglich wird, wenn man das Minimalprinzip durch Hinzunahme einer den Druck explizit enthaltenden Nebenbedingung ergänzt. In seiner Dissertation [5] verwendet er, wie schon gesagt, das Verschwinden der durch die Drücke pro Zeiteinheit geleisteten Arbeit, der sogenannten Verdrängungsarbeit. Diese Bedingung ist jedoch nicht als Nebenbedingung des Extremalprinzips geeignet. Um das zu zeigen, werde zunächst der Ausdruck für die Verdrängungsarbeit aufgestellt. Die an einem infinitesimalen Quader mit den Kantenlängen $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ und $\mathrm{d}z$ von den Drücken an seinen Oberflächen pro Zeiteinheit geleistete Arbeit ist durch

$$\begin{aligned} \mathrm{d}V = {} & [-(p\,u)(x+\mathrm{d}x, y, z) + (p\,u)(x, y, z)]\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\, + \\ & + [-(p\,v)(x, y+\mathrm{d}y, z) + (p\,v)(x, y, z)]\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\, + \\ & + [-(p\,w)(x, y, z+\mathrm{d}z) + (p\,w)(x, y, z)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\ = {} & -[(p\,u)_x + (p\,v)_y + (p\,w)_z](x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \end{aligned} \tag{2}$$

gegeben. Darin sind u, v, w die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors $\mathfrak{v}$ und p der Druck. Die Differentiationen $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ und $\frac{\partial}{\partial z}$ werden hier und im folgenden meist durch die Indizes x, y und z bezeichnet. Die gesamte Verdrängungsarbeit gewinnt man durch Integration des Ausdruckes (2) über den betrachteten Strömungsraum. Ist L die Spaltlänge (x-Richtung), B die Spaltbreite (z-Richtung) und $h(x, y)$ die Spalthöhe (y-Richtung), so erhält man

$$V = -\int_0^L\int_0^B\int_0^h [p_x\,u + p_y\,v + p_z\,w + p\,u_x + p\,v_y + p\,w_z]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z. \tag{3}$$

Die Konstanz der Verdrängungsarbeit ist nun aber nach den Lehren der Variationsrechnung (Näheres in dem Buch von *Grüss* [6]) nicht geeignet, als Nebenbedingung eines isoperimetrischen Variationsproblems zu dienen. Die Nebenbedingungsfunktion darf nämlich nicht für die gleichen Funktionen ein Extremum besitzen wie die Größe, deren Extremum gesucht wird. Das heißt: Die zur Nebenbedingung gehörenden Eulerschen Gleichungen dürfen für die Lösungsfunktion des Variationsproblems nicht erfüllt sein. Das ist nun aber gerade der Fall. Die zur Verdrängungsarbeit gehörenden Eulerschen Gleichungen lauten nämlich, wenn man den Integranden mit $-G$ bezeichnet:

$$\begin{aligned} G_u - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial G}{\partial u_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial G}{\partial u_y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial G}{\partial u_z}\right) &= p_x - \frac{\partial p}{\partial x} \\ G_v - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial G}{\partial v_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial G}{\partial v_y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial G}{\partial v_z}\right) &= p_y - \frac{\partial p}{\partial y} \\ G_w - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial G}{\partial w_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial G}{\partial w_y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial G}{\partial w_z}\right) &= p_z - \frac{\partial p}{\partial z} \\ G_p - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial G}{\partial p_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial G}{\partial p_y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial G}{\partial p_z}\right) &= u_x + v_y + w_z - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \tag{4}$$

Wie man sieht, sind sie identisch erfüllt, ganz gleich, um welche Funktionen es sich bei den Geschwindigkeits- und Druckverteilungen handelt. V hat also im ganzen Funktionsraum seinen Extremalwert und ist somit konstant. Die Nebenbedingung $V = 0$ schränkt daher die Wahl der bei der Variation zugelassenen benachbarten Vergleichsfunktionen in keiner Weise ein. Auch wenn V nur für die gesuchten Extremalfunktionen des Problems der minimalen Dissipationsarbeit ein Extremum besäße, wäre es als Nebenbedingung nicht brauchbar, da das Problem mit den Methoden der Variationsrechnung dann aus dem Grunde nicht lösbar wäre, weil es in der Nachbarschaft der Lösungsfunktionen keine Vergleichsfunktionen gäbe, die ebenfalls die Nebenbedingung erfüllen. Denn für diese wäre der Wert der Nebenbedingungsfunktion je nach Art des für die Lösungsfunktion geltenden Nebenbedingungsextremums entweder größer oder kleiner als für die Lösungsfunktion. Daß die Verdrängungsarbeit für beliebige, die Randbedingungen der Spaltströmung erfüllende Geschwindigkeits- und Druckverteilungen gleich Null ist, sieht man aber noch unmittelbarer, wenn man in Gleichung (3) das Volumenintegral nach dem Gaußschen Satz in ein Oberflächenintegral umwandelt. Es ergibt sich dann, wie es auch bereits in der Vogelpohlschen Dissertation steht:

$$V = -\int_0^L\int_0^B\int_0^h \operatorname{div}(p\,\mathfrak{v})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = -\oint\oint_{\text{Oberfläche}} p\,\mathfrak{v}\,\mathfrak{n}\,\mathrm{d}f. \qquad (5)$$

Das Flächenintegral ist nun aber gleich Null. Auf Grund der Randbedingungen der Spaltströmung verschwinden nämlich die Anteile der festen Grenzflächen, an denen zwar $p \neq 0$, aber die Geschwindigkeitskomponente normal zur Fläche gleich Null ist, und die Anteile der freien Oberflächen, an denen $p = 0$ ist. Das gilt für beliebige Geschwindigkeits- und Druckverteilungen, sofern sie nur den Randbedingungen genügen.

Weiter ist an der Vogelpohlschen Herleitung noch unbefriedigend, daß er zur Bestimmung der Druck- und Geschwindigkeitsverteilungen nicht nur das Extremalprinzip verwendet, sondern daneben noch die Navier-Stokesschen Gleichungen benutzt. Aus den letzteren werden nämlich zunächst Ausdrücke für die Geschwindigkeitsverteilungen errechnet, die allerdings noch als Unbekannte die Druckgradienten enthalten. Diese Verteilungen werden dann in das Variationsproblem und die Nebenbedingungen eingesetzt, so daß als zu variierende Funktion nur noch die Druckverteilung auftritt.

In der vorliegenden Arbeit soll nun gezeigt werden, daß sich eine physikalisch plausible Bedingung finden läßt, die sich als Nebenbedingung des Prinzips der minimalen Dissipationsleistung eignet, und daß sich aus dem so entstehenden isoperimetrischen Problem allein ohne Zuhilfenahme anderer Gleichungen sowohl die Geschwindigkeitsverteilungen als auch die Druckverteilung einer Spaltströmung bestimmen lassen.

Für die Spaltströmung mögen folgende Voraussetzungen gemacht werden:

1) Die Flüssigkeit sei eine inkompressible Newtonsche Flüssigkeit.
2) Die Trägheitskräfte und die Volumenkräfte (Gravitation) seien vernachlässigbar klein gegenüber den Zähigkeitskräften und können daher vernachlässigt werden.

3) Eine etwa vorhandene Krümmung des Spaltes, zum Beispiel beim zylindrischen Gleitlager, kann vernachlässigt werden. Man kann also den Spalt abwickeln und in die x-z-Ebene legen. Dabei möge die x-Richtung mit der Bewegungsrichtung zusammenfallen.

4) Die Dicke des Spaltes $h\,(x, z)$ sei außerordentlich klein gegenüber den Spaltausdehnungen L in x-Richtung und B in z-Richtung. Wie man aus einer Größenordnungsabschätzung ersehen kann, ist daher die Geschwindigkeitskomponente in y-Richtung klein gegenüber den anderen Geschwindigkeitskomponenten u und w. Ebenso sind die Änderungen der Geschwindigkeitskomponenten in der x-Richtung und z-Richtung klein gegenüber ihren Änderungen in der y-Richtung. Ferner ist die Druckänderung quer zur Schicht vernachlässigbar. Das heißt: Es ist $p_y = 0$.

5) Die Viskosität sei entweder konstant, oder aber es sei der Einfluß ihrer Veränderlichkeit auf die Geschwindigkeitsverteilungen so gering, daß man mit Mittelwerten quer zur Schicht rechnen kann, wobei $\bar{\eta}_y = 0$ ist.

6) Die Randbedingungen mögen, etwas allgemeiner als bei *Vogelpohl*, lauten:

$$\begin{aligned} &u\,(x, 0, z) = U_1\,(x, z); \quad u\,[x, h\,(x, z), z] = U_2\,(x, z) \\ &v\,(x, 0, z) = V_1\,(x, z); \quad v\,[x, h\,(x, z), z] = V_2\,(x, z) \\ &w\,(x, 0, z) = 0; \qquad\quad\; w\,[x, h\,(x, z), z] = 0\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Im Unterschied zur Vogelpohlschen Ableitung wird im folgenden nichts über die Randbedingungen von p vorausgesetzt. Der Druck kann daher an den freien Oberflächen durchaus von Null verschieden sein. Das bedeutet dann natürlich, daß auch die Verdrängungsarbeit nicht unbedingt gleich Null zu sein braucht. Der Fall der ebenen Hagen-Poiseuille-Strömung wird daher in der folgenden Betrachtung miterfaßt.

Die Dissipationsfunktion für Newtonsche Flüssigkeiten ist in allgemeinster Form durch

$$\begin{aligned} \Phi = \eta\,[2\,(u_x^2 + v_y^2 + w_z^2) + (v_x + u_y)^2 + (w_y + v_z)^2 + (u_z + w_x)^2 - \\ - \frac{2}{3}\,(u_x + v_y + w_z)^2] \end{aligned} \tag{7}$$

gegeben. Führt man hierin die nach Voraussetzung 4) möglichen Vernachlässigungen durch, so erhält man als Dissipationsfunktion den bedeutend einfacheren Ausdruck:

$$\Phi = \eta\,[u_y^2 + w_y^2]\,. \tag{8}$$

Hierin soll im folgenden nach Voraussetzung 5) noch an Stelle von η der Mittelwert quer zur Schicht $\bar{\eta}$ verwandt werden.

Der Satz vom Minimum der dissipierten Energie besagt nun, daß sich im Spalt derartige Strömungsverhältnisse einstellen, daß

$$\int_0^L \int_0^B \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,[\int_0^{h\,(x,z)} \bar{\eta}\,(u_y^2 + w_y^2)\,\mathrm{d}y] = \mathrm{Min} \tag{9}$$

wird. Da die Dissipationsfunktion überall positiv ist, ist es auch die eckige Klammer, also der Integrand des Doppelintegrals über x und z. Hieraus folgt, daß die Minimalbedingung erfüllt ist, wenn für alle x- und z-Werte

$$\int_0^{h(x,z)} \bar{\eta}\,(u_y^2 + w_y^2)\,dy = \text{Min} \tag{10}$$

ist. Als Nebenbedingung wird die Tatsache eingeführt, daß der Energiesatz erfüllt sein muß. Dieser besagt, daß die an dem Strömungsraum von außen geleistete Energie gleich der in ihm dissipierten Energie sein muß. Dabei wird allerdings die Änderung der kinetischen Energie vernachlässigt. Das ist aber durchaus erlaubt, da nach Voraussetzung 2) die Trägheitskräfte gegenüber den Zähigkeitskräften vernachlässigbar sein sollten. Betrachtet man eine Säule vom infinitesimalen Querschnitt $dx\,dz$ und der Höhe $h\,(x, z)$, so ist die zugeführte Leistung als Summe aus den Leistungen der Schubspannungen an den bewegten festen Randflächen und der an den Oberflächen der Säule pro Zeiteinheit geleisteten Verdrängungsarbeit durch

$$U_1\,\tau_1\,dx\,dz + U_2\,\tau_2\,dx\,dz - \int_0^{h(x,z)} [(p\,u)_x + (p\,v)_y + (p\,w)_z]\,dy\,dx\,dz =$$

$$= dx\,dz \int_0^{h(x,z)} \left[\frac{U_1\,\tau_1 + U_2\,\tau_2}{h} - p_x\,u - p\,u_x - p\,v_y - p_z\,w - p\,w_z\right] dy \tag{11}$$

gegeben. Hierin wurde bereits nach Voraussetzung 4) p_y gleich Null gesetzt. Die Schubspannungen τ_1 und τ_2 ergeben sich aus

$$\tau_1\,(x, z) = -\,\bar{\eta}\,(x, z)\,u_y\,(x, 0, z); \quad \tau_2\,(x, z) = \bar{\eta}\,(x, z)\,u_y\,[x, h\,(x, z), z]. \tag{12}$$

Die in der Säule dissipierte Leistung beträgt:

$$dx\,dz \int_0^{h(x,z)} \bar{\eta}\,(u_y^2 + w_y^2)\,dy. \tag{13}$$

Nach dem Energiesatz müssen nun die Ausdrücke (11) und (13) einander gleich sein. Dividiert man die so erhaltene Gleichung noch durch $dx\,dz$ und bringt alle Glieder auf die linke Seite, so erhält man:

$$\int_0^{h(x,z)} \Big\{\bar{\eta}(u_y^2 + w_y^2) + p_x\,u + p\,u_x + p\,v_y + p_z\,w + p\,w_z -$$

$$- \frac{U_1\,\tau_1 + U_2\,\tau_2}{h}\Big\}\,dy = \int_0^{h(x,z)} \Psi\,dy = 0. \tag{14}$$

Das Extremalproblem besteht nun darin, solche Geschwindigkeits- und Druckfunktionen zu finden, die dieser Nebenbedingung genügen und mit denen

$$\int_0^{h(x,z)} \bar{\eta}\,(u_y^2 + w_y^2)\,dy = \int_0^{h(x,z)} \Phi\,dy = \text{Min} \tag{15}$$

wird. Nach den Regeln der Variationsrechnung bildet man zur Lösung dieses isoperimetrischen Problems die Funktion

$$F = \Phi + \lambda \Psi = (1 + \lambda)\left\{\bar{\eta}\,(u_y^2 + w_y^2) + \frac{\lambda}{1 + \lambda}\left(p_x\,u + p\,u_x + p\,v_y + p_z\,w + \right.\right.$$
$$\left.\left. + p\,w_z - \frac{U_1\,\tau_1 + U_2\,\tau_2}{h}\right)\right\} \tag{16}$$

mit einem später aus der Nebenbedingung zu bestimmenden konstanten Faktor λ und benutzt diese Funktion zur Aufstellung der Eulerschen Gleichungen, die zum Extremalproblem $\int\limits_0^h F\,\mathrm{d}y = \text{Extr}$ ohne Nebenbedingung gehören. Diese Gleichungen lauten, wenn man noch für $\lambda/(1 + \lambda)$ die Bezeichnung α einführt:

$$\begin{aligned}
&F_u - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right) = (1 + \lambda)\left\{\alpha\,p_x - \frac{\partial}{\partial y}(2\,\bar{\eta}\,u_y)\right\} = 0 \text{ oder } u_{yy} = \frac{\alpha}{2\,\bar{\eta}}\,p_x \\
&F_v - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial v_y}\right) = -\lambda\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \qquad\qquad \text{oder } p_y = 0 \\
&F_w - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial w_y}\right) = (1 + \lambda)\left\{\alpha\,p_z - \frac{\partial}{\partial y}(2\,\bar{\eta}\,w_y)\right\} = 0 \text{ oder } w_{yy} = \frac{\alpha}{2\,\bar{\eta}}\,p_z \\
&F_p - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial p_y}\right) = \lambda\,(u_x + v_y + w_z) = 0 \qquad \text{oder } u_x + v_y + w_z = 0.
\end{aligned} \tag{17}$$

Zunächst werden nun die erste und dritte Gleichung zweimal nach y integriert. Das ist ohne weiteres möglich, da auf Grund der Voraussetzungen 4) und 5) $\bar{\eta}$ und p nicht von y abhängen. Die dabei auftretenden Integrationskonstanten werden aus den Randbedingungen (6) bestimmt. Man erhält auf diese Weise für u und w die Ausdrücke:

$$u = \frac{\alpha}{4\bar{\eta}}\,p_x\,(y^2 - y\,h) + U_1\left(1 - \frac{y}{h}\right) + U_2\,\frac{y}{h}\,;\; w = \frac{\alpha}{4\,\bar{\eta}}\,p_z\,(y^2 - y\,h). \tag{18}$$

Die hierin auftretende, noch unbekannte Konstante α muß nun aus der Nebenbedingung (14) bestimmt werden. Zunächst ergibt sich aus der letzten Gleichung

$$u_y = \frac{\alpha}{4\,\bar{\eta}}\,p_x\,(2\,y - h) + \frac{U_2 - U_1}{h}\,;\; w_y = \frac{\alpha}{4\,\bar{\eta}}\,p_z\,(2\,y - h). \tag{19}$$

Damit erhält man:

$$\int\limits_0^h \bar{\eta}\,(u_y^2 + w_y^2)\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^h \left\{\frac{\alpha^2}{16\,\bar{\eta}}\,(p_x^2 + p_z^2)\,(4\,y^2 - 4\,y\,h + h^2) - \right.$$
$$\left. - \frac{\alpha}{2}\,\frac{U_2 - U_1}{h}\,p_x\,(2\,y - h) + \frac{\bar{\eta}\,(U_2 - U_1)^2}{h^2}\right\}\mathrm{d}y = \frac{\alpha^2 h^3}{48\,\bar{\eta}}\,(p_x^2 + p_z^2) + \tag{20}$$
$$+ \frac{\bar{\eta}\,(U_2 - U_1)^2}{h}\,.$$

Weiter bekommt man unter Benutzung der vierten Eulerschen Gleichung:

$$\int_0^h \{p_x u + p u_x + p v_y + p_z w + p w_z\} \,\mathrm{d}y = \int_0^h \{p_x u + p_z w + p\,(u_x + v_y + w_z)\} \,\mathrm{d}y = \int_0^h (p_x u + p_z w)\,dy =$$
$$= \int_0^h \left\{\frac{\alpha}{4\bar\eta}(p_x{}^2 + p_z{}^2)(y^2 - y\,h) + p_x U_1\left(1 - \frac{y}{h}\right) + p_x U_2 \frac{y}{h}\right\} \mathrm{d}y =$$
$$= -\frac{\alpha\, h^3}{24\,\bar\eta}(p_x^2 + p_z^2) + \frac{p_x h}{2}(U_1 + U_2)\,. \tag{21}$$

Aus den Gleichungen (12) und (19) folgt nun:

$$\tau_1 = -\bar\eta\left[-\frac{\alpha\, h\, p_x}{4\,\bar\eta} + \frac{U_2 - U_1}{h}\right] = \frac{\alpha\, h\, p_x}{4} - \frac{\bar\eta\,(U_2 - U_1)}{h}$$
$$\tau_2 = \bar\eta\left[\frac{\alpha\, h\, p_x}{4\,\bar\eta} + \frac{U_2 - U_1}{h}\right] = \frac{\alpha\, h\, p_x}{4} + \frac{\bar\eta\,(U_2 - U_1)}{h}\,. \tag{22}$$

Damit erhält man schließlich:

$$-\int_0^h \frac{U_1\,\tau_1 + U_2\,\tau_2}{h}\,\mathrm{d}y = -(U_1\,\tau_1 + U_2\,\tau_2) =$$
$$= -\frac{\alpha\, h\, p_x}{4}(U_1 + U_2) - \frac{\bar\eta}{h}\,[U_2\,(U_2 - U_1) - U_1\,(U_2 - U_1)] =$$
$$= -\frac{\alpha\, h\, p_x}{4}(U_1 + U_2) - \frac{\bar\eta\,(U_2 - U_1)^2}{h}\,. \tag{23}$$

Damit die Nebenbedingung (14) erfüllt ist, muß die Summe der drei Ausdrücke (20), (21) und (23) gleich Null sein. Das heißt: es muß

$$\frac{\alpha^2\, h^3}{48\,\bar\eta}(p_x^2 + p_z^2) + \frac{\bar\eta\,(U_2 - U_1)^2}{h} - \frac{\alpha\, h^3}{24\,\bar\eta}(p_x^2 + p_z^2) + \frac{p_x\, h}{2}(U_1 + U_2) -$$
$$- \frac{\alpha\, h\, p_x}{4}(U_1 + U_2) - \frac{\bar\eta(U_2 - U_1)^2}{h} = (\alpha - 2)\left[\frac{\alpha\, h^3}{48\,\bar\eta}(p_x^2 + p_z^2) - \frac{h\, p_x}{4}(U_1 + U_2)\right] = 0 \tag{24}$$

sein. Die Nebenbedingung ist daher erfüllt, wenn

$$\alpha = 2 \tag{25}$$

ist. Setzt man diesen Wert in die Gleichung (18) ein, so erhält man:

$$u = \frac{p_x}{2\,\bar\eta}(y^2 - y\,h) + U_1\left(1 - \frac{y}{h}\right) + U_2\frac{y}{h}\,;\;\; w = \frac{p_z}{2\,\bar\eta}(y^2 - y\,h)\,. \tag{26}$$

Hierin treten als Unbekannte noch p_x und p_z auf. Zur Bestimmung von p kann nun die vierte der oben hergeleiteten Eulerschen Gleichungen (17) verwandt werden. Diese Gleichung ist zwar mit der Kontinuitätsgleichung für inkompressible Substanzen identisch, hat sich aber hier direkt aus dem Extremalproblem ergeben, obwohl die Voraussetzung der Inkompressibilität bisher noch nicht verwandt wurde. Da in der Gleichung noch v_y auftritt, von v aber bisher nur die Randbedingungen bekannt sind, soll sie über y integriert werden. Man bekommt dann unter Beachtung der Randbedingungen (6):

$$\int_0^{h(x,z)} [u_x + v_y + w_z]\,\mathrm{d}y = 0 \text{ oder } \int_0^{h(x,z)} (u_x + w_z)\,\mathrm{d}y = -\int_0^{h(x,z)} v_y\,\mathrm{d}y = V_1 - V_2. \quad (27)$$

Aus der Regel für die Differentiation von Integralen ergibt sich nun wieder unter Beachtung der Randbedingungen (6):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_0^{h(x,z)} u(x,y,z)\,\mathrm{d}y\right] = \int_0^{h(x,z)} u_x(x,y,z)\,\mathrm{d}y + \frac{\partial h}{\partial x}(x,z)\cdot u[x, h(x,z), z] = \int_0^{h(x,z)} u_x\,\mathrm{d}y + \frac{\partial h}{\partial x} U_2 \quad (28)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\int_0^{h(x,z)} w(x,y,z)\,\mathrm{d}y\right] = \int_0^{h(x,z)} w_z(x,y,z)\,\mathrm{d}y + \frac{\partial h}{\partial z}(x,z)\cdot w[x, h(x,z), z] = \int_0^{h(x,z)} w_z\,\mathrm{d}y. \quad (29)$$

Aus Gleichung (27) folgt daher:

$$\begin{aligned} V_1 - V_2 &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\int_0^{h(x,z)} u\,\mathrm{d}y\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\int_0^{h(x,z)} w\,\mathrm{d}y\right] - U_2\frac{\partial h}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{p_x}{2\bar\eta}\int_0^h (y^2 - y h)\,\mathrm{d}y + U_1\int_0^h\left(1 - \frac{y}{h}\right)\mathrm{d}y + U_2\int_0^h \frac{y}{h}\,\mathrm{d}y\right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{p_z}{2\bar\eta}\int_0^h (y^2 - y h)\,\mathrm{d}y\right] - U_2\frac{\partial h}{\partial x} = \\ &= -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{h^3}{12\bar\eta}p_x - (U_1 + U_2)\frac{h}{2}\right] - \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{h^3}{12\bar\eta}p_z\right] - U_2\frac{\partial h}{\partial x}. \end{aligned} \quad (30)$$

Nach einer kleinen Umformung ergibt sich hieraus die Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{\bar{\eta}}\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{h^3}{\bar{\eta}}\frac{\partial p}{\partial z}\right) = 6\,(U_1 - U_2)\frac{\partial h}{\partial x} + 6\,h\frac{\partial\,(U_1 + U_2)}{\partial x} + (V_2 - V_1). \tag{31}$$

Das ist aber die bereits von *Reynolds* [7] für die Spaltströmung aus den Navier-Stokesschen Gleichungen und der Kontinuitätsgleichung abgeleitete Gleichung. Aus ihr kann man bei Vorgabe von Randbedingungen für p die Druckverteilung berechnen. Mit den hieraus sich ergebenden Gradienten p_x und p_z erhält man nach Gleichung (26) die Geschwindigkeitskomponenten u und w. Für die Berechnung der dritten Geschwindigkeitskomponente v kann man, da mit u und w auch u_x und w_z bekannt sind, die vierte Eulersche Gleichung verwenden. Es ist nämlich:

$$v = V_1 + \int_0^y v_y\,dy = V_1 - \int_0^y (u_x + w_z)\,dy\,. \tag{32}$$

Wie aus dem vorstehenden hervorgeht, reicht also das hier vorgetragene Minimalprinzip aus, um die Geschwindigkeits- und Druckverhältnisse in einer Spaltströmung vollständig zu bestimmen. Man gelangt zu denselben Ergebnissen, als wenn man von den Navier-Stokesschen Gleichungen und der Kontinuitätsgleichung ausgegangenen wäre. Man kann daher den folgenden Satz aussprechen:

> In einer Spaltströmung einer inkompressiblen Newtonschen Flüssigkeit bilden sich bei gegebenen Randbedingungen derartige Druck- und Geschwindigkeitsverteilungen aus, daß die in Reibungswärme umgesetzte Dissipationsenergie ein Minimum wird, wobei als Nebenbedingung die Gültigkeit des Energiesatzes vorausgesetzt werden muß.

Es soll hier zum Schluß noch auf die bereits in der Vogelpohlschen Dissertation erwähnte Tatsache hingewiesen werden, daß man die Strömungsgleichungen auch gewinnen kann, wenn man die dissipierte Energie unter der Nebenbedingung der Gültigkeit der Kontinuitätsgleichung

$$u_x + v_y + w_z = 0 \tag{33}$$

zum Minimum macht. Es handelt sich in diesem Falle um die Lösung eines Lagrangeschen Extremalproblems. Nach den Regeln der Variationsrechnung wird dabei zunächst wieder eine Funktion

$$H = \Phi + \lambda\,(u_x + v_y + w_z) \tag{34}$$

gebildet, wobei hier die Größe λ im Unterschied zum isoperimetrischen Problem nicht mehr eine Konstante, sondern eine Funktion von x, y und z ist, die später aus der Nebenbedingung (33) bestimmt werden kann. Anschließend werden dann die Eulerschen Gleichungen gebildet, die zum Problem

$$\int_0^L \int_0^B \int_0^h H \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y = \int_0^L \int_0^B \int_0^h \{\bar{\eta}\, (u_y^2 + w_y^2) + \lambda \, (u_x + v_y + w_z)\} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y = \text{Extr} \tag{35}$$

ohne Nebenbedingung gehören. Dabei ergibt sich:

$$\begin{aligned} H_u - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial H}{\partial u_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial H}{\partial u_y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial H}{\partial u_z}\right) &= -\frac{\partial \lambda}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}(2\,\bar{\eta}\, u_y) = 0 \\ H_v - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial H}{\partial v_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial H}{\partial v_y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial H}{\partial v_z}\right) &= -\frac{\partial \lambda}{\partial y} = 0 \\ H_w - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial H}{\partial w_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial H}{\partial w_y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial H}{\partial w_z}\right) &= -\frac{\partial}{\partial y}(2\,\bar{\eta}\, w_y) - \frac{\partial \lambda}{\partial z} = 0 \,. \end{aligned} \tag{36}$$

Man erkennt sofort, daß diese Gleichungen mit den Navier-Stokesschen Gleichungen in ihrer auf Grund der Voraussetzungen der Spaltströmung vereinfachten Form

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\bar{\eta}\frac{\partial u}{\partial y}\right); \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\bar{\eta}\frac{\partial w}{\partial y}\right) \tag{37}$$

identisch werden, wenn man

$$\lambda = -2\,p \tag{38}$$

setzt. Berücksichtigt man dies, so kann man durch Integration zu genau denselben Ausdrücken (26) für die Geschwindigkeiten u und w gelangen und mit diesen durch Einsetzen in die Kontinuitätsgleichung (33) und Integration über y die Reynoldssche Gleichung (31) erhalten. Ohne die Identifikation von λ mit $-2\,p$, also ohne Benutzung der Navier-Stokesschen Gleichungen, ist aber die Ermittlung der Strömungsverhältnisse nicht möglich. Man gelangt zwar zu Ausdrücken für u und w, die die Funktion λ enthalten, und zu einer der Reynoldsschen Gleichung entsprechenden Bestimmungsgleichung für λ, kann dieses aber nicht berechnen, da man für diese Funktion keine Randbedingungen kennt. So ist also das oben behandelte isoperimetrische Extremalproblem dem Lagrangeschen insofern überlegen, als man zu seiner Lösung weder von den Navier-Stokesschen Gleichungen noch von der Kontinuitätsgleichung Gebrauch machen muß.

Literatur

[1] *A. Tipei:* Hidro-Aerodinamica Lubrificatiei, Bucuresti: Editura Academiei Republicii Populare Romine 1957. Englische Ausgabe bearbeitet von *W. Gross:* Theory of Lubrication, Stanford, California: Stanford University Press 1962.

[2] *O. Pinkus* und *B. Sternlicht:* Theory of Hydrodynamic Lubrication, New York/Toronto/London: McGraw-Hill Book Company, Inc. 1961.

[3] *A. Cameron:* Principles of Lubrication, London: Longmans Green and Co. Ltd. 1966.

[4] *H. Lamb:* Lehrbuch der Hydrodynamik, 5. Aufl., Deutsch herausgegeben von *E. Helly* und *R. v. Mises*. B. G. Teubner: Leipzig und Berlin 1931.

[5] *G. Vogelpohl:* Zur hydrodynamischen Theorie der Lagerreibung. Ztschr. f. angew. Math. und Mech. **15** (1935) S. 378.
Beiträge zur Kenntnis der Gleitlagerreibung. VDI-Forschungsheft 386. VDI-Verlag: Berlin 1937.

[6] *G. Grüss:* Variationsrechnung. 2. Aufl. herausgegeben von *W. Meyer-König*. Quelle & Meyer: Heidelberg 1955.

[7] *O. Reynolds:* On the Theory of Lubrication and its Application to Mr. B. Towers Experiments, including an experimental determination of the viscosity of olive oil. Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. (A) **177** (1886) S. 157. Deutsch: Ostwald's Klassiker **218**.